Konvexe Familien holomorpher Funktionen

Grunsky, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.57-61

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Konvexe Familien holomorpher Funktionen

Von **Helmut Grunsky**

Der Inhalt meines Vortrages hat kaum direkte Beziehungen zu den funktionentheoretischen Untersuchungen von Gauß. Er gehört der Riemannschen Funktionentheorie an. Gauß hat der Dissertation von Riemann, deren Ideen am Anfang der geometrischen Funktionentheorie stehen, hohe Anerkennung gezollt, hat aber auch zu erkennen gegeben, daß er ähnliche und vielleicht noch weiterreichende Gedanken verfolgte, die er freilich nie abschließend schriftlich niedergelegt hat. Unter diesen Umständen dürfen vielleicht die folgenden Ausführungen einen Platz beanspruchen an einem Tage, der dem Gedächtnis von Gauß gewidmet ist.

Wir legen ein Gebiet D endlicher Zusammenhangszahl n zugrunde, mit $\partial D = K_1 + \ldots + K_n$, wo die Komponenten K_ν als Kontinuen und, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als analytische Kurven vorausgesetzt werden. Ferner sei $0 \in D$, $\infty \notin \bar{D}$. Wir betrachten holomorphe Funktionen F, die in D definiert, insbesondere Funktionenfamilien, die konvex und kompakt sind; konvex heißt: jede konvexe Linearkombination von zwei Funktionen aus der Familie **K** gehört wieder zu **K**:

$$F_1 \in \mathbf{K}, \quad F_2 \in \mathbf{K} \Rightarrow \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \in \mathbf{K} \quad \text{für } \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Wir stellen folgendes *Wertevorratsproblem:* Gegeben ein System von m verschiedenen Punkten aus D:

$$z^{(m)} := \{z_1, \ldots, z_m\} \subset D.$$

Es sei

$$F \in \mathbf{K}, \quad F(z_\mu) =: w_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m; \quad w^{(m)} := \{w_1, \ldots, w_m\}.$$

Gesucht ist der Wertevorrat von $w^{(m)}$, wenn F die Familie **K** durchläuft:

$$\{w^{(m)}\}_{F \in K} =: \mathbf{W}^{(m)} \subset \mathbb{C}^m.$$

$\mathbf{W}^{(m)}$ ist ebenfalls konvex und kompakt. Es liegt eine lineare Abbildung vor:

$$\Phi_m : \mathbf{K} \mapsto \mathbb{C}^m, \quad \Phi_m(\mathbf{K}) = \mathbf{W}^{(m)}.$$

Bei einer konvexen Menge interessieren besonders die extremen Elemente $\in_x$, das sind Elemente, die keine konvexe Kombination aus andern Elementen zulassen. $\mathbf{W}^{(m)}$ ist die konvexe Hülle seiner extremen Elemente, und nach dem Satz von Krein-Milman trifft dasselbe für **K** zu. Ist $\mathbf{w}^{(m)} \in_x \mathbf{W}^{(m)}$, so gibt es $f \in_x \mathbf{K}$ mit $\Phi_m(f) = \mathbf{w}^{(m)}$.

Von den Möglichkeiten, konvexe Familien zu bilden hebe ich eine hervor, die ich an zwei Beispielen verfolge. Eine Funktionenfamilie ist konvex, wenn der Wertevorrat jeder ihrer Funktionen ein- und derselben konvexen Menge *K* angehört. Zusätzlich führen wir Normierungsbedingungen ein:

$$\mathbf{K} = \{F: F \text{ holomorph in } D, F(D) \subset K, K \text{ konvex; Norm.-Bed.}\}.$$

Wir betrachten die beiden Fälle:

a) $K = \{w: |w| < 1\}$; Norm.-Bed.: $F(0) = 0$, $F'(0) \geqq 0$. Wir setzen $\mathbf{K} = \mathbf{B}$.

b) $K = \{w: \operatorname{Re} w > 0\}$; Norm.-Bed.: $F(0) = 1$. Wir setzen $\mathbf{K} = \mathbf{P}$.

Mit Rücksicht auf die Normierungsbedingungen setzen wir beidemale voraus: $z_\mu \neq 0$ für $\mu = 1, \ldots, m$.

Würden sich die Normierungsbedingungen genau entsprechen (beidemale $F'(0) \geqq 0$, oder beidemale keine Bedingung für $F'(0)$), so wären die Probleme durch eine Möbiustransformation von $|w| < 1$ in $\operatorname{Re} w > 0$ ineinander überzuführen, also äquivalent; d.h. wenn $\mathbf{W}^{(m)}$ im einen Fall genau bekannt ist, so auch im andern, ebenso Φ_m. Da wir jedoch nur einige Eigenschaften von $\mathbf{W}^{(m)}$ und Φ_m erschließen können und gewisse Schlußweisen nicht in beiden Fällen möglich oder gleich einfach sind, so lohnt es sich, beide zu untersuchen, abgesehen von dem Unterschied in der Normierung.

Wir gehen kurz auf a) ein.

a) $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ *sei die Teilmenge mit* $|F(z)| = 1$ *für* $z \in \partial D$. Das sind also Funktionen, die jede Randkomponente von D auf den ein- oder mehrfach durchlaufenen Einheitskreis abbilden; ihr Wertevorrat bedeckt $|w| < 1$ überall gleich oft. Es gilt ein *Approximationssatz:* $\mathbf{B}_0$ ist dicht in $\mathbf{B}$. $\mathbf{B}_0$ besteht ganz aus extremen Elementen, aber deren Menge ist schwierig zu kennzeichnen. Es gehören dazu alle Funktionen $F \in \mathbf{B}$ mit $|F(z)| = 1$ für $z \in M \subset \partial D$, wo M positives Maß besitzt. Um $\mathbf{W}^{(m)}$ zu kennzeichnen, suchen wir $\partial\, \mathbf{W}^{(m)}$. Genauer: wir suchen diejenigen Funktionen $F \in \mathbf{B}$ mit $\Phi_m(F) \in \partial\, \mathbf{W}^{(m)}$. Der Approximationssatz erlaubt es, nachträglich zu zeigen, daß wir uns auf Funktionen aus $\mathbf{B}_0$ beschränken dürfen. Sei $F \in \mathbf{B}_0$ mit $F(\zeta_\varkappa) = 0$, $\varkappa = 0, \ldots, k$, $\zeta = 0$, wobei die $\zeta_\varkappa$ nicht notwendig voneinander verschieden, also mehrfache Nullstellen zugelassen sind. Es ist

$$\log|F(z)| = -g(z,0) - \sum_{\varkappa=1}^{k} g(z,\zeta_\varkappa), \qquad \arg F(z) = -g^*(z,0) - \sum_{\varkappa=1}^{k} g^*(z,\zeta_\varkappa),$$

wo $g(z,\zeta)$ die Greensche Funktion von D bedeutet, g^* die inbezug auf z Konjugierte, mit passender Normierung. Nicht jede Wahl des Systems $\zeta^{(k)} := \{\zeta_\varkappa\}_{\varkappa=1}^{k}$ führt zu einer Funktion aus $\mathbf{B}_0$; diese Punkte müssen so gewählt werden, daß die Periode des Ausdrucks für $\arg F(z)$ bei Umlauf um jede Randkomponente $\equiv 0 \bmod 2\pi$ ausfällt. Das führt zu n-1 Nebenbedingungen. Werden sie gewahrt und durchläuft z die Werte $z_1, \ldots, z_m$, so liegt eine Abbildung aus einer Teilmannigfaltigkeit $\mathbf{M} \subset \mathbb{C}^k$ in den Raum $\mathbb{C}^m$ vor: $\mathbf{M} \mapsto \mathbb{C}^m$. Wenn für ein bestimmtes System $\zeta^{(k)}$ ein Randpunkt von $\mathbf{W}^{(m)}$ erreicht werden soll, so muß der Rang der zugehörigen Funktionalmatrix kleiner als $2m$ sein. Führt man diesen Gedankengang im einzelnen durch, so findet man:

Jedes $\zeta_\varkappa$ muß Nullstelle eines Differentials $dR(z)$ sein mit folgenden Eigenschaften:

1) $R'(z)\,dz$ ist reell auf ∂D. 2) $R'(z)$ hat je einen Pol 1. Ordnung in $0, z_1, \ldots, z_m$. Die Gesamtordnung eines Differentials mit der Eigenschaft 1), d.i. die Anzahl l seiner Nullstellen weniger Anzahl der Pole, ist n-2 (wobei Nullstellen auf ∂D mit Gewicht

$^1/_2$ zählen). Also ist $l = m+n-1$. Man kann ferner zeigen: die Ordnung jeder Nullstelle von dR ist mindestens gleich der Ordnung der entsprechenden Nullstelle von F, und es folgt: $k \leqq n+m-1$.

Zu jedem Randpunkt von $\mathbf{W}^{(m)}$ *gehört also eine Funktion aus* $\mathbf{B}_0$ *mit höchstens* $n+m$ *Nullstellen.*

Jeder Randpunkt von $\mathbf{W}^{(m)}$ *ist extrem,* denn wäre ein solcher Punkt konvexe Kombination zweier anderer Punkte, so würde das Entsprechende von Urbildern in $\mathbf{B}_0$ gelten; eine konvexe Kombination zweier verschiedener Funktionen aus **B** kann aber nicht überall vom Betrage 1 auf ∂D sein. Dieselbe Überlegung beweist *die Einzigkeit des Urbildes eines Randpunktes von* $\mathbf{W}^{(m)}$.

In mancher Hinsicht interessanter ist der Fall

b) Der Teilmenge $\mathbf{B}_0$ in **B** entspricht eine Teilmenge $\mathbf{P}_0 \subset \mathbf{P}$, die so gekennzeichnet ist: $F \in \mathbf{P}_0 \Leftrightarrow Re\, F(z) = 0$ *für* $z \in \partial D \setminus \{\zeta_\varkappa\}_{\varkappa=1}^{k}$, wo $\zeta_\varkappa$ einen Pol 1. Ordnung auf ∂D bezeichnet. Jede Randkomponente K_ν wird also auf die ein- oder mehrmal durchlaufene imaginäre Achse abgebildet und auf jeder K_ν liegt somit mindestens ein Pol. Es gilt wieder ein Approximationssatz: $\mathbf{P}_0$ *ist dicht in* **P**.

Ist auf jeder K_ν genau ein Pol vorgeschrieben, so haben wir zunächst die Beträge der Residuen als Parameter verfügbar (ihre Argumente sind durch $\mathrm{Re}\, F(z) = 0$ für $z \in \partial D$ in einer Umgebung von $\zeta_\varkappa$ festgelegt), also n reelle Parameter. Genau ebensoviele Nebenbedingungen sind zu erfüllen: die Bedingungen für Eindeutigkeit bei Umläufen um n-1 Randkomponenten und die Normierungsbedingung. Daraus kann man folgern: Es gibt genau ein $\mathfrak{f} \in \mathbf{P}_0$, wenn auf jeder K_ν genau ein, vorgegebener, Pol liegt. *Diese* $\mathfrak{f}$ *sind die extremen Elemente von* **P**.

Wir fragen wieder nach $\partial\, \mathbf{W}^{(m)}$, d.h. wir wollen zuerst die Funktionen kennzeichnen mit $\Phi_m(F) \in \partial\, \mathbf{W}^{(m)}$. Durch analoge Überlegungen wie im Fall a) finden wir: es ist $F \in \mathbf{P}_0$ und die Pole $\{\zeta_\varkappa\}_{\varkappa=1}^{k}$ von F sind die Nullstellen eines gewissen Differentials dR mit den Eigenschaften:

1) $i^{-1} R'(z)\, dz \geqq 0$ auf ∂D. 2) $R'(z)$ hat je einen Pol 1. Ordnung in jedem der Punkte 0 und z_μ, $\mu = 1, \ldots, m$:

$$R'(z) = \frac{\alpha}{z} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\gamma_\mu}{z - z_\mu} + \ldots .$$

Wir normieren durch $\sum_{\mu=1}^{m} |\gamma_\mu|^2 = 1$. Man beweist leicht: zu einem bestimmten System $\gamma := \{\gamma_\mu\}_{\mu=1}^{m}$ gibt es genau ein solches Differential, das auf jeder K_ν mindestens eine Nullstelle (gerader Ordnung) hat.

Aus a) entnimmt man: *zu jedem* $w^{(m)} \in \partial\, \mathbf{W}^{(m)}$ *gehört genau eine Funktion* $F \in \mathbf{P}_0$ *mit* $\Phi_m(F) = w^{(m)}$.

Nun ist FR' holomorph auf ∂D und hat Pole 1. Ordnung in 0, z_μ $\mu = 1, \ldots, m$ mit den Residuen $\alpha, -\gamma_\mu w_\mu$, $w_\mu = F(z_\mu)$. Daher ist

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(z)\, R'(z)\, dz = \alpha - \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu w_\mu.$$

Andererseits ist wegen $\operatorname{Re} F(z) = 0$ auf $\partial D \setminus \{\zeta_\varkappa\}_{\varkappa=1}^{k}$: $\operatorname{Re} I = 0$, also

$$\operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu w_\mu = \alpha' := \operatorname{Re} \alpha.$$

D. h. das Wertesystem $w^{(m)}$ gehört einer gewissen Hyperebene in $\mathbb{C}^m$ an, und man zeigt: *das ist die Stützhyperebene H_γ von $\mathbf{W}^{(m)}$, die orthogonal ist zu der durch $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m$ gekennzeichneten Richtung in* $\mathbb{C}^m$. Jede Funktion $F \in \mathbf{P}_0$, die keine andern Pole auf ∂D hat als die durch die Nullstellen von R' zugelassenen, ergibt ein Wertesystem $w^{(m)}$, das in dieser Hyperebene liegt. $H_\gamma \cap \mathbf{W}^{(m)} =: \Pi^r$ *ist ein Polyeder einer gewissen Dimension r;* seine Ecken erhält man, indem man aus dem System der Nullstellen $\{a_\iota\}_{\iota=1}^{j}$ von R' auf ∂D irgend n aussucht, je eine auf jeder K_ν.

Wir können genauere *Aussagen über die Dimensionszahl r und über die Anzahl e der Ecken von* Π^r machen. Zu einer oberen Schranke für r gelangt man über die Feststellung, daß die Nullstellen von R' auf ∂D wegen $dR \geqq 0$ alle von gerader, also mindestens zweiter Ordnung sind, die Pole eines zugehörigen F alle von 1. Ordnung. Haben wir zwei Funktionen F_1 und F_2, die beide zu demselben R gehören, so können wir bilden:

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F_1(z)\, F_2(z)\, R'(z)\, dz.$$

Wegen $i^{-1} R'(z)\, dz \geqq 0$, $\operatorname{Re} F_1(z) = \operatorname{Re} F_2(z) = 0$ auf $\partial D \setminus \{a_\iota\}_{\iota=1}^{j}$ ist $\operatorname{Im} I = 0$; andererseits: $I = \alpha - \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu w_{\mu 1} w_{\mu 2}$, $w_{\mu 1} = F_1(z_\mu)$, $w_{\mu 2} = F_2(z_\mu)$, und es folgt:

$$\operatorname{Im} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu w_{\mu 1} w_{\mu 2} = \alpha'' := \operatorname{Im} \alpha.$$

Für $F_1 = F_2$ besagt das, daß $w^{(m)}$ auf einer gewissen Quadrik $\mathbf{Q} \subset \mathbb{C}^m$ liegt. Die Wertesysteme $w_1^{(m)}$ und $w_2^{(m)}$, die zu F_1 und F_2 gehören, sind zueinander konjugiert inbezug auf $\mathbf{Q}$. *$H_\gamma \cap \mathbf{W}^{(m)}$ liegt auf einer linearen Mannigfaltigkeit, die inbezug auf die Quadrik* $\mathbf{Q} \subset \mathbb{C}^m$ *selbstkonjugiert ist.* Das bedeutet, daß ihre Dimension $r \leqq \frac{2m-1}{2}$, $r \leqq m-1$ ist.

Ist j die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von R' auf ∂D, so haben wir in den Beträgen der Residuen der möglichen Pole von $F \subset \mathbf{P}_0$ j reelle Parameter zur Verfügung, die aber n Nebenbedingungen unterworfen sind, also eine (j-n)-dimensionale Mannigfaltigkeit, und es folgt $r = j-n \leqq m-1$, $j \leqq n+m-1$. Wenn wir von diesen j Nullstellen irgend n herausgreifen, je eine auf jeder K_ν, so bekommen wir eine Funktion, die zu einer Ecke von Π^r gehört. Um die Anzahl e nach oben abzuschätzen, ist also ein kombinatorisches Problem zu lösen: j Elemente auf n Teilmengen zu verteilen, derart, daß die Anzahl der Repräsentantensysteme (je ein Element aus jeder Teilmenge) möglichst groß wird. Das tritt ein, wenn die Verteilung möglichst gleichmäßig erfolgt, und man erhält:

$$e \leqq (q+1)^{n-\varrho} (q+2)^{\varrho},$$

wobei die ganzen, nichtnegativen Zahlen q und ϱ definiert sind durch $m-1 = qn+\varrho$, $0 \leqq \varrho < n$.

Endlich erhält man eine *untere Schranke für die Dimensionszahl r der Polyeder Π^r, die nicht Seite eines Polyeders höherer Dimension sind.* Bei Variation der zugehörigen $\zeta_\varkappa$ muß eine Mannigfaltigkeit entstehen, deren Dimensionszahl mindestens die von $\partial W^{(m)}$ ist. Wir haben 2k Parameter: die Anzahl der Pole und die Beträge der Residuen, vermindert um die Anzahl n der Nebenbedingungen, also eine (2k-n)-dimensionale Mannigfaltigkeit von Funktionen. Es folgt: $2k-n \geqq 2m-1$, also $k \geqq m + \frac{n-1}{2}$, $r = k-n \geqq m - \frac{n+1}{2}$.

Literatur:

Die Aussagen von a) sind, in etwas anderer Formulierung, im wesentlichen enthalten in

P. Garabedian. Schwarz' lemma and the Szegö kernel function. Transact. Amer. math. Soc. *67*, 1–35 (1949).

b) stützt sich auf eine von Z. Nehari begründete Methode:

Z. Nehari. Analytic functions possessing a positive real part. Duke math. J. 15, 1033–1042 (1948).